

ĐỀ THI HSG LỚP 9 QUẬN 1 – Vòng 1 (2015-2016)

Thời gian: 120 phút

Bài 1: (6 điểm)

a) Cho $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1$. Tính giá trị của $A = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{y+z} + \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{z+x} + \frac{x^2 - y^2 + z^2}{x+y}$

b) Rút gọn biểu thức sau: $M = \frac{2\sqrt{4 + \sqrt{5 - \sqrt{21 - \sqrt{80}}}}}{\sqrt{10} + \sqrt{2}}$

Bài 2: (3 điểm)

a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x\sqrt{6-x} + (5-x)\sqrt{x+1}$, với $0 \leq x \leq 5$

b) Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn: $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$. Chứng minh rằng: $(abcd + 2015)$ viết dưới dạng hiệu của hai số chính phương.

Bài 3: (4 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = x^2 - 6x + 9$

b) $\sqrt{\frac{x+56}{16}} + \sqrt{x-8} = \frac{x}{8}$

Bài 4: (6 điểm) Cho điểm A nằm ngoài đường (O;R). Vẽ AB, AC là tiếp tuyến của (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC, M là điểm di động trên đoạn thẳng BH, đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại D, E. (D nằm giữa A và M). Vẽ ON vuông góc với DE tại N.

a) Chứng minh: $AB^2 = AMAN$

b) Xác định vị trí của điểm M để tổng $AD - 3AN + AE$ đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Chứng minh rằng: bốn điểm D, E, O, H cùng thuộc một đường tròn.

Bài 5: (1 điểm)

“Mắt thần dành cho người khiếm thị – Sống là cho đâu chỉ nhận riêng mình”

Thủ tướng Chính phủ Nguyễn Tấn Dũng đã dành trọn buổi sáng nay (11-9-2015) tại trụ sở Bộ Khoa học và Công nghệ để gặp gỡ, lắng nghe các nhà khoa học trẻ tiêu biểu năm 2015. Trước chia sẻ thẳng thắn của các nhà khoa học trẻ về phát minh, sáng chế và những chông gai trên con đường nghiên cứu khoa học – công nghệ.

Cả nước hiện có 1,2 triệu người khiếm thị, trong đó 300.000 người mù hoàn toàn. Mắt thần dành cho những người khiếm thị do Tiến sĩ Nguyễn Bá Hải (ĐHSP Kỹ Thuật TP Hồ Chí Minh) nghiên cứu, chế tạo đã tặng hoàn toàn cho những người có hoàn cảnh khó khăn, trẻ em nghèo, người mù bán vé số... Đáng chú ý, sản phẩm này được đối tác tại Mỹ quan tâm, muốn đặt hàng và Thủ tướng Chính phủ đã trực tiếp đặt hàng 300.000 chiếc.

Trong hội nghị có 70 thành viên nam và một số thành viên nữ. Tất cả đều là các nhà khoa học trẻ hoặc các nhà lãnh đạo Chính phủ, các phóng viên truyền thông. Biết rằng số thành viên nữ là các nhà khoa học trẻ bằng số thành viên nam là các nhà lãnh đạo, các phóng viên truyền thông.

Hỏi trong hội nghị có bao nhiêu nam và nữ là các nhà khoa học trẻ?



Hướng Dẫn: ĐỀ THI HSG LỚP 9
QUẬN 1 – Vòng 1 (2015-2016)

Thời gian: 120 phút

Bài 1: (6 điểm)

a) Cho $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1$. Tính giá trị của $A = \frac{x^2+y^2-z^2}{y+z} + \frac{-x^2+y^2+z^2}{z+x} + \frac{x^2-y^2+z^2}{x+y}$ (2 Đ)

Ta có: $\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}\right)(x+y+z) = x+y+z$

$$\Rightarrow (x+y+z) \cdot \frac{x}{y+z} + (x+y+z) \cdot \frac{y}{z+x} + (x+y+z) \cdot \frac{z}{x+y} = x+y+z$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y+z} + x + \frac{y^2}{z+x} + y + \frac{z^2}{z+x} + z = x+y+z \Rightarrow \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} = 0$$

Do đó: $A = \frac{x^2}{y+z} + y - z + \frac{y^2}{z+x} + z - x + \frac{z^2}{x+y} + x - y = 0$

Vậy $A = \frac{x^2+y^2-z^2}{y+z} + \frac{-x^2+y^2+z^2}{z+x} + \frac{x^2-y^2+z^2}{x+y}$

b) Rút gọn biểu thức sau: $M = \frac{2\sqrt{4+\sqrt{5}-\sqrt{21-\sqrt{80}}}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$ (4 Điểm)

$$M = \frac{2\sqrt{4+\sqrt{5}-\sqrt{(2\sqrt{5}-1)^2}}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{4+\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = 1$$

Vậy $M=1$

Bài 2: (3 điểm)

a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x\sqrt{6-x} + (5-x)\sqrt{x+1}$, với $0 \leq x \leq 5$ (1,5 điểm)

Xét $0 \leq x \leq 5$ thì $P > 0$.

Xét: $P^2 = x^2(6-x) + (25-10x+x^2)(x+1) + 2x(5-x)\sqrt{(6-x)(x+1)}$

Áp dụng BĐT Cô – si với hai số không âm: $6-x; x+1$, ta có:

$$2\sqrt{(6-x)(x+1)} \leq 6-x+x+1=7$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } P^2 &\leq -3x^2 + 15x + 25 + 7x(5-x) = -10\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) + \frac{125}{2} + 25 \\ &= -10\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{175}{2} \leq \frac{175}{2} = \left(\frac{5\sqrt{14}}{2}\right)^2 \Rightarrow P \leq \frac{5\sqrt{14}}{2} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ (thỏa điều kiện)

$$\text{Vậy } P_{\max} = \frac{5\sqrt{14}}{2} \text{ tại } x = \frac{5}{2}$$

b) Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn: $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$. Chứng minh rằng: $(abcd + 2015)$ viết dưới dạng hiệu của hai số chính phương. (1,5 điểm)

Ta có: $(2m+1)^2 = 4m(m+1)+1$

Do đó với mọi $m \in \mathbb{Z}$ thì $(2m+1)^2$ chia 8 dư 1. Nên với a, b, c, d lẻ thì a^2, b^2, c^2, d^2 chia 8 dư 1.

Suy ra: không xảy ra $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$ (vì vế trái chia 8 dư 1, vế phải chia 8 dư 3)

Vậy trong các số a, b, c, d có ít nhất một số chẵn. Ta có: $a.b.c.d + 2015$ là số lẻ.

Đặt $a.b.c.d + 2015 = 2n+1 (n \in \mathbb{Z}) \Rightarrow 2n+1 = (n+1-n)(n+1+n) = (n+1)^2 - n^2$

Vậy ta có được điều phải chứng minh.

Bài 3: (4 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = x^2 - 6x + 9$ (2 điểm)

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 3$

Ta có: $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow (\sqrt{x+2} - 2) + (1 - \sqrt{3-x}) = x^2 - 6x + 8$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)-4}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{1-(3-x)}{1+\sqrt{3-x}} - (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-2) \left[\frac{1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{1}{1+\sqrt{3-x}} + 4-x \right] = 0(1)$$

Do $-2 \leq x \leq 3 \Rightarrow 4-x > 0$ nên biểu thức trong dấu ngoặc thứ hai dương.

Do đó: $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Vậy $S = \{2\}$

b) $\sqrt{\frac{x+56}{16}} + \sqrt{x-8} = \frac{x}{8}$ (2 điểm)

Điều kiện: $x \geq 8$. Phương trình đã cho trở thành:

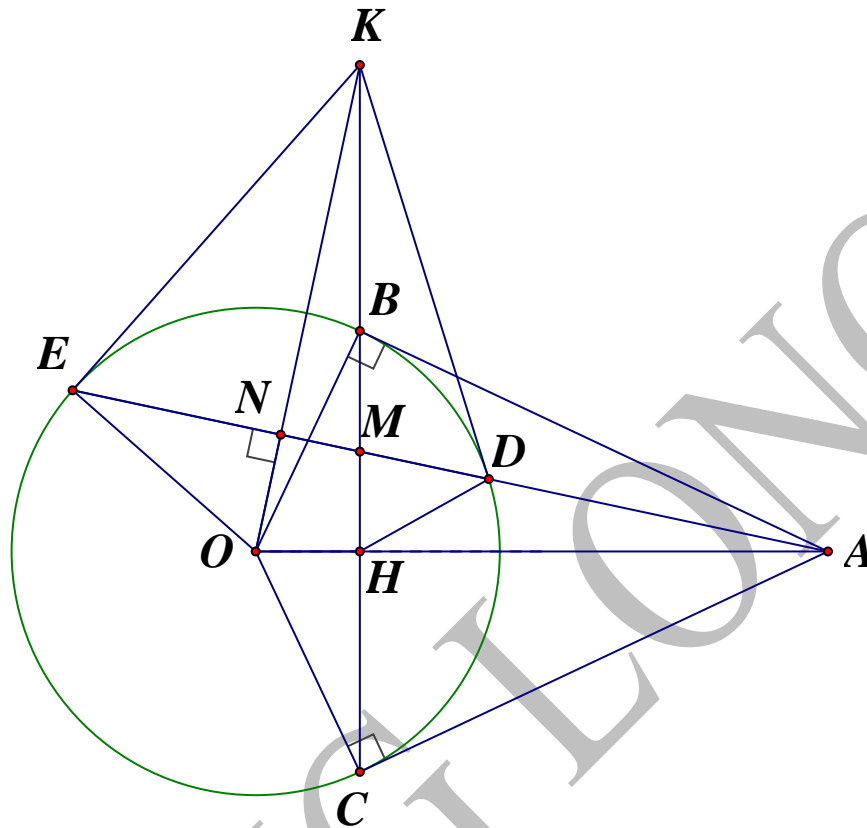
$$2\sqrt{x+56+16\sqrt{x-8}} = x \Leftrightarrow 2\sqrt{x-8+16\sqrt{x-8}+64} = x \Leftrightarrow x\sqrt{(\sqrt{x-8}+8)^2} = x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-8} = x-16 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 16 \\ 4(x-8) = x^2 - 32x + 256 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 16 \\ x^2 - 36x + 288 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 16 \\ (x-24)(x-12) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 24 \text{ (nhận)}$$

Vậy $S = \{24\}$

Bài 4: (6 điểm) Cho điểm A nằm ngoài đường (O;R). Vẽ AB, AC là tiếp tuyến của (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC, M là điểm di động trên đoạn thẳng BH, đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại D, E. (D nằm giữa A và M). Vẽ ON vuông góc với DE tại N.



a) Chứng minh: $AB^2 = AM \cdot AN$ (3 Điểm)

Chứng minh được: OA là đường trung trực của BC $\Rightarrow OA \perp BC$ tại H

Ta có: $AB^2 = AH \cdot AO = AM \cdot AN$

b) Xác định vị trí của điểm M để tổng $AD - 3AN + AE$ đạt giá trị nhỏ nhất. (2 Điểm)

Ta có: $AN \leq AO$ (quan hệ đường vuông góc - đường xiên)

$ON \perp DE \Rightarrow N$ là trung điểm của DE $\Rightarrow NE = ND$

Ta có: $AD - 3AN + AE = AN - DN - 3AN + AN - EN = -AN \geq -AO$: không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow N \equiv O \Leftrightarrow M \equiv H$

Vậy khi M là giao điểm của AO và BC thì $AD - 3AN + AE$ đạt GTNN.

c) Chứng minh rằng: bốn điểm D, E, O, H cùng thuộc một đường tròn. (1 Điểm)

Gọi K là giao điểm của đường ON và BC.

$$\triangle ONA \sim \triangle OHK \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{ON}{OH} = \frac{OA}{OK} \Rightarrow ON \cdot OK = OH \cdot OA$$

$$\Rightarrow ON \cdot OK = OE^2$$

$$\triangle OEK \sim \triangle ONE \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \angle OEK = \angle ONE = 90^\circ$$

Do đó: $\angle ODK = \angle OEK = \angle OHK = 90^\circ \Rightarrow D, H, E$ thuộc đường tròn đường kính OK.

$\Rightarrow D, H, E, O, K$ cùng thuộc một đường tròn. $\Rightarrow D, E, O, H$

Bài 5: (1 điểm)

“Mất thần dành cho người khiếm thị – Sống là cho đâu chỉ nhận riêng mình”

Thủ tướng Chính phủ Nguyễn Tấn Dũng đã dành trọn buổi sáng nay (11-9-2015) tại trụ sở Bộ Khoa học và Công nghệ để gặp gỡ, lắng nghe các nhà khoa học trẻ tiêu biểu năm 2015. Trước chia sẻ thẳng thắn của các nhà khoa học trẻ về phát minh, sáng chế và những chông gai trên con đường nghiên cứu khoa học – công nghệ.

Cả nước hiện có 1,2 triệu người khiếm thị, trong đó 300.000 người mù hoàn toàn. Mất thần dành cho những người khiếm thị do Tiến sĩ Nguyễn Bá Hải (ĐHSP Kỹ Thuật TP Hồ Chí Minh) nghiên cứu, chế tạo đã tặng hoàn toàn cho những người có hoàn cảnh khó khăn, trẻ em nghèo, người mù bán vé số... Đáng chú ý, sản phẩm này được đối tác tại Mỹ quan tâm, muốn đặt hàng và Thủ tướng Chính phủ đã trực tiếp đặt hàng 300.000 chiếc.

Trong hội nghị có 70 thành viên nam và một số thành viên nữ. Tất cả đều là các nhà khoa học trẻ hoặc các nhà lãnh đạo Chính phủ, các phóng viên truyền thông. Biết rằng số thành viên nữ là các nhà khoa học trẻ bằng số thành viên nam là các nhà lãnh đạo, các phóng viên truyền thông.

Hỏi trong hội nghị có bao nhiêu nam và nữ là các nhà khoa học trẻ?

Gọi số nữ là các nhà khoa học trẻ là x (người) (x là số nguyên dương)

Số thành viên nam là các nhà lãnh đạo, các phóng viên truyền thông bằng x (người)

Số thành viên nam là các nhà khoa học trẻ: $70 - x$ (người)

Số nam và số nữ là các nhà khoa học trẻ là: $x + (70 - x) = 70$ (người)

 HẾT 